Chapitre D

Analyse spectrale

D.1. Espaces de Hilbert

D.1.1. Rappels. On rappelle qu'un espace de Hilbert est un espace vectoriel H sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire (i.e. d'une forme sesquilinéaire $(\cdot|\cdot)$ de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ – linéaire en la première variable et antilinéaire en la seconde – définie positive), et complet pour la norme $x \mapsto \|x\| := \sqrt{(x|x)}$.

Pour tout sous-ensemble A de H on note

$$A^{\perp} := \Big\{ x \in H \,/\, (x|a) = 0 \ \forall a \in A \Big\} .$$

On rappelle que c'est un sous-espace vectoriel fermé de H, et on vérifie que $A^{\perp} = (\overline{A})^{\perp}$ et que $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.

Les espaces de Hilbert sont uniformément convexes, donc réflexifs.

On rappelle les théorèmes fondamentaux dans ce contexte (voir le cours du premier semestre), et tout d'abord le théorème de projection sur un convexe fermé.

Théorème D.1.1 (Projection sur un convexe fermé)**.** *Soit K un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H et soit $x \in H \setminus K$. Alors*

a) Il existe un unique point $p_K x \in K$ tel que

$$\|x - p_K x\| = \min_{y \in K} \|x - y\| .$$

On prolonge p_K à H en posant $p_K y = y$ pour tout $y \in K$.

b) Le point $p_K x \in K$ est l'unique point $y \in K$ tel que

$$(x - y | z - y) \leq 0 \quad \forall z \in K .$$

c) On a

$$\|p_K x - p_K y\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in H .$$

Rappelons le théorème de représentation de Riesz.

Théorème D.1.2 (de représentation de Riesz)**.** *Soit H un espace de Hilbert et soit L une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique vecteur $h \in H$ tel que*

$$Lx = (h|x) \quad \forall x \in H .$$

De plus

$$\|L\|_{H^*} = \|h\|_H .$$

Enfin le théorème suivant est très important dans la pratique.

Théorème D.1.3. *Soit H un espace de Hilbert séparable. Il admet une base hilbertienne, c'est-à-dire une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ totale et orthonormée. En outre*

a) *Pour tout $x \in H$ on a*
$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|e_n)e_n$$
et la série converge dans H.

b) *Pour tous x, y dans H, en notant $x_n := (x|e_n)$ et $y_n := (y|e_n)$ on a*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y_n} = (x|y)\,.$$

D.1.2. Théorèmes de Stampacchia et de Lax-Milgram.

Définition D.1.4. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et a une forme bilinéaire sur H. On dit que a est*

a) *continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que*
$$|a(x, y)| \leq C\|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in H\,.$$

b) *coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*
$$a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2 \quad \forall x \in H\,.$$

Théorème D.1.5 (Théorème de Stampacchia (1922-1978))**.** *Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur un espace de Hilbert H et soit K un convexe fermé non vide de H. Pour toute forme linéaire continue f sur H il existe un unique $x \in K$ tel que*
$$a(x, y - x) \geq \langle f, y - x\rangle \quad \forall y \in K\,. \tag{D.1}$$
De plus, si a est symétrique alors x est caractérisé par
$$x \in K\,, \quad \frac{1}{2}a(x, x) - \langle f, x\rangle = \min_{y\in K}\Big(\frac{1}{2}a(y, y) - \langle f, y\rangle\Big)\,.$$

Démonstration. D'après le Théorème D.1.2, il existe un unique $h \in H$ tel que
$$\langle f, y\rangle = (h|y) \quad \forall y \in H\,.$$
Soit $x \in H$ fixé, alors l'application
$$y \longmapsto a(x, y)$$
est une forme linéaire continue sur H donc par le Théorème D.1.2 encore, il existe un unique élément de H que nous noterons Ax tel que
$$a(x, y) = (Ax|y) \quad \forall y \in H\,.$$
L'application A est linéaire de H dans H et on a pour tout $x \in H$
$$\|Ax\|^2 = \big|a(x, Ax)\big| \leq C\|x\|\|Ax\|$$
et
$$(Ax|x) = a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2$$
donc
$$\|Ax\| \leq C\|x\| \quad \text{et} \quad (Ax|x) \geq \alpha\|x\|^2 \quad \forall x \in H\,. \tag{D.2}$$
Il s'agit donc de trouver $x \in K$ tel que
$$(Ax|y - x) \geq (h|y - x) \quad \forall y \in K\,.$$
Si $\rho > 0$ est une constante donnée (que nous fixerons plus loin) il est équivalent de démontrer qu'il existe un unique x tel que
$$(\rho(h - Ax) + x - x|y - x) \leq 0 \quad \forall y \in K\,,$$

ou encore
$$x = p_K(\rho(h - Ax) + x)\,.$$
Notons $S(y) := p_K(\rho(h - Ay) + y)$, nous allons choisir ρ de telle sorte qu'il existe $k < 1$ tel que
$$\forall y, y' \in K\,, \quad \|S(y) - S(y')\| \leq k\|y - y'\|$$
ce qui répondra au problème grâce au théorème de point fixe de Picard. La projection étant une contraction (voir le Théorème D.1.1) on sait que
$$\forall y, y' \in K\,, \quad \|S(y) - S(y')\| \leq \|y - y' - \rho(Ay - Ay')\|$$
donc par (D.2) il vient pour tous $y, y' \in K$,
$$\begin{aligned}\|S(y) - S(y')\|^2 &= \|y - y'\|^2 - 2\rho(Ay - Ay'|y - y') + \rho^2\|Ay - Ay\|^2 \\ &\leq \|y - y'\|^2(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2)\,.\end{aligned}$$
Il suffit donc de choisir $0 < \rho < 2\alpha/C$ et $k^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2 < 1$ et le résultat suit.

Supposons maintenant que a est symétrique, alors a définit un produit scalaire sur H, et la norme $\sqrt{a(x,x)}$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|$ par hypothèse. En appliquant le Théorème D.1.2 il existe $h' \in H$ tel que
$$\langle f, y\rangle = a(h', y) \quad \forall y \in H\,.$$
Alors on a par (D.1)
$$a(h' - x, y - x) \leq 0 \quad \forall y \in K \tag{D.3}$$
donc $x = p_K h'$ pour le produit scalaire défini par a. Par le Théorème D.1.1, (D.3) revient à ce que $x \in K$ réalise
$$a(h' - x, h' - x) = \min_{y \in K} a(h' - y, h' - y)$$
ou de manière équivalente réalise
$$\Big(\frac{1}{2}a(x,x) - a(h', x)\Big) = \min_{y \in K}\Big(\frac{1}{2}a(y,y) - a(h', y)\Big)$$
et la conclusion provient de la définition de h'. Le théorème est démontré. □

Le corollaire suivant est particulièrement important pour résoudre des EDP elliptiques par exemple, par une approche variationnelle (voir le Chapitre E). Il est aussi à la base des méthodes d'éléments finis en analyse numérique.

Corollaire D.1.6. *[Théorème de Lax (1926-)-Milgram (1912-1961)] Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur un espace de Hilbert H. Alors pour toute forme linéaire continue $f \in H^*$ il existe un unique $x \in H$ tel que*
$$a(x, y) = \langle f, y\rangle \quad \forall y \in H\,.$$
De plus, si a est symétrique alors x est caractérisé par
$$\frac{1}{2}a(x,x) - \langle f, x\rangle = \min_{y \in H}\Big(\frac{1}{2}a(y,y) - \langle f, y\rangle\Big)\,.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème D.1.5 à $K = H$, qui implique que
$$a(x, y - x) \geq \langle f, y - x\rangle \quad \forall y \in H\,,$$
et le résultat suit. □

D.2. Opérateurs

D.2.1. Définitions et notations. On se donne dans toute la suite deux espaces de Banach E et F. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. Un opérateur (ou encore opérateur non borné, terminologie courante mais pas très bien choisie !) est une application linéaire T définie sur un sous-espace vectoriel $D(T) \subset E$ à valeurs dans F. L'espace $D(T)$ est le domaine de l'opérateur.

On dit que T est borné si $D(T) = E$ et si $T : E \to F$ est continue, autrement dit s'il existe $C > 0$ telle que

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E \quad \forall x \in E\,.$$

Exemples. On pose $E = F = L^2(\mathbb{R})$ et on considère l'application T de domaine $D(T) = H^1(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall f \in D(T)\,, \quad Tf = f'\,.$$

Alors T est non borné sur E car $D(T) \neq E$. En revanche si $E = H^1(\mathbb{R})$ alors T est borné car

$$\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}\,.$$

On dit que T est à domaine dense si $\overline{D(T)} = E$. On note

$$\begin{aligned}
\operatorname{Gr} T &:= \bigcup_{x \in D(T)} (x, Tx) \quad \text{le graphe de } T\,;\\
\operatorname{Im} T &:= \bigcup_{x \in D(T)} Tx \quad \text{l'image de } T\,;\\
\operatorname{Ker} T &:= \big\{x \in D(T) \,/\, Tx = 0\big\} \quad \text{le noyau de } T\,.
\end{aligned}$$

On dit que T est fermé si son graphe est un fermé de $E \times F$ (ou de manière équivalente si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D(T)$ convergeant vers $x \in E$ telle que $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y on a $x \in D(T)$ et $y = Tx$). Si T est un opérateur à domaine dense, on définit le sous-espace vectoriel $D(T^*)$ de F^* par

$$D(T^*) := \Big\{f \in F^* \,/\, x \in D(T) \longmapsto \langle f, Tx\rangle_{F^*,F} \text{ est continue}\Big\}\,.$$

Pour tout $f \in D(T^*)$ on définit l'application $g : D(T) \to \mathbb{R}$

$$\forall x \in D(T)\,, \quad g(x) := \langle f, Tx\rangle_{F^*,F}\,.$$

Cette application est linéaire continue, et comme $D(T)$ est dense et $\mathbb{R}$ est complet on peut prolonger g à E tout entier en une application linéaire continue $g \in E^*$ (sans invoquer la densité ni la complétude on peut appliquer le théorème de Hahn-Banach). Ce prolongement est unique par densité de $D(T)$ puisque g est continue. On définit alors l'opérateur T^* sur $D(T^*)$ par $T^*f := g$.

Définition D.2.1 (Adjoint d'un opérateur)**.** *Soit T un opérateur à domaine dense. L'adjoint de T, noté T^*, est l'unique opérateur linéaire de domaine*

$$D(T^*) := \Big\{f \in F^* \,/\, x \in D(T) \longmapsto \langle f, Tx\rangle_{F^*,F} \text{ est continue}\Big\}$$

à valeurs dans E^* défini par

$$\forall f \in D(T^*)\,,\ \forall x \in D(T)\,, \quad \langle f, Tx\rangle_{F^*,F} = \langle T^*f, x\rangle_{E^*,E}\,.$$

Exemple. On pose $E = F = L^2(\mathbb{R})$ et on considère l'application T de domaine $D(T) = H^1(\mathbb{R})$ définie par
$$\forall f \in D(T)\,, \quad Tf = f' + f\,.$$
Mais $H^1(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et on a $D(T^*) = H^1(\mathbb{R})$ et
$$T^*f = -f' + f\,.$$

Si A est un sous-ensemble de E on définit son orthogonal
$$A^\perp := \Big\{ f \in E^*, / \, \langle f, x\rangle_{E^*,E} = 0 \quad \forall x \in A \Big\}\,.$$
De même si B est un sous-ensemble de E^* on définit son orthogonal
$$B^\perp := \Big\{ x \in E \,/\, \langle f, x\rangle_{E^*,E} = 0 \quad \forall f \in B \Big\}\,.$$

Exercice. Soit M un sous-espace vectoriel de E et N un sous-espace vectoriel de E^*. Alors
$$(M^\perp)^\perp = \overline{M} \quad \text{et} \quad \overline{N} \subset (N^\perp)^\perp\,.$$
Si E est réflexif alors $\overline{N} = (N^\perp)^\perp$. Plus généralement $(N^\perp)^\perp$ est l'adhérence de N pour la topologie faible $*$.

Proposition D.2.2. *Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur linéaire non borné, à domaine dense. Alors T^* est fermé.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que si $f_n \in D(T^*)$ est une suite convergeant vers f dans F^* et si T^*f_n converge vers g dans E^* alors pour tout $x \in D(T)$
$$\langle f, Tx\rangle - \langle g, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \big(\langle f_n, Tx\rangle - \langle T^*f_n, x\rangle\big) = 0$$
et donc pour tout $x \in D(T)$
$$\big|\langle f, Tx\rangle\big| \le \|g\|_{E^*}\|x\|_E$$
donc $f \in D(T^*)$ et $T^*f = g$. □

Exercice. Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur linéaire non borné, fermé, à domaine dense. Alors on a
$$\operatorname{Ker} T = \big(\operatorname{Im} T^*\big)^\perp\,, \quad \operatorname{Ker} T^* = \big(\operatorname{Im} T\big)^\perp\,, \quad \overline{\operatorname{Im} T^*} \subset \big(\operatorname{Ker} T\big)^\perp\,, \quad \overline{\operatorname{Im} T} = \big(\operatorname{Ker} T^*\big)^\perp$$
On a de plus
$$\operatorname{Im} T \text{ fermé} \iff \operatorname{Im} T^* \text{ fermé} \iff \operatorname{Im} T = \big(\operatorname{Ker} T^*\big)^\perp \iff \operatorname{Im} T^* = \big(\operatorname{Ker} T\big)^\perp\,.$$

D.2.2. Opérateurs de rang fini et opérateurs compacts.

Définition D.2.3 (Opérateur de rang fini)**.** *On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang fini si la dimension de son image $\operatorname{Im} T$ est finie.*

Définition D.2.4 (Opérateur compact)**.** *On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact si l'image par T de la boule unité fermée $B(E)$ de E est relativement compacte dans F pour la topologie forte.*

Proposition D.2.5. *L'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ des opérateurs compacts de E dans F est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$. Il contient l'adhérence des opérateurs continus de rang fini.*

Démonstration. Le fait que $\mathcal{K}(E,F)$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ est clair, montrons qu'il est fermé. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs compacts convergeant en norme vers un opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$. On sait que F est complet donc il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $T(B_E)$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de taille ε. Soit n tel que

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

Comme $T_n(B_E)$ est relativement compacte, il existe un ensemble fini I et une famille $(y_i)_{i\in I}$ de F tels que

$$T_n(B_E) \subset \bigcup_{i\in I} B(y_i, \frac{\varepsilon}{2}),$$

et on conclut par l'inégalité triangulaire que

$$T(B_E) \subset \bigcup_{i\in I} B(y_i, \varepsilon) \ ,$$

d'où le résultat.

Le second résultat provient simplement du fait que les opérateurs de rang fini sont compacts, donc les limites dans $\mathcal{L}(E,F)$ des opérateurs de rang fini sont compacts. □

Remarque. Il peut arriver que l'adhérence des opérateurs continus de rang fini soit distincte de $\mathcal{K}(E,F)$. Un premier exemple a été donné en 1972, en renvoie à [**2**] pour des détails.

Proposition D.2.6. *Dans le cas où F est un espace de Hilbert, tout opérateur compact de $\mathcal{K}(E,F)$ peut s'écrire comme une limite d'opérateurs de $\mathcal{L}(E,F)$ de rang fini.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$ et $\varepsilon > 0$. Comme $K := \overline{T(B_E)}$ est compact, il existe un ensemble fini I et une famille $(y_i)_{i\in I}$ de F tels que

$$K \subset \bigcup_{i\in I} B(y_i, \varepsilon).$$

Soit G l'espace vectoriel engendré par $\{y_i,\ i \in I\}$ et soit p_G la projection orthogonale sur G. Alors p_G est un operateur continu de rang fini. On sait que pour tout $x \in B_E$ il existe $i \in I$ tel que

$$\|Tx - y_i\| \leq \varepsilon$$

et donc

$$\|p_G Tx - Tx\| \leq \varepsilon .$$

La proposition est démontrée. □

Exercice. La composée d'un opérateur compact et d'un opérateur continu (et réciproquement) est compacte.

Théorème D.2.7 (Théorème de Schauder)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach. Alors T appartient à $\mathcal{K}(E,F)$ si et seulement si T^* appartient à $\mathcal{K}(F^*,E^*)$.*

Démonstration. Supposons que T appartient à $\mathcal{K}(E,F)$ et montrons que $\overline{T^*(B(F^*))}$ est compacte dans E^*. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B(F^*)$ et montrons que $(T^*y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente. En notant

$$K := \overline{T(B(E))} \quad \text{et} \quad H := \Big\{\varphi_n : z \in K \longmapsto \varphi_n(z) := \langle y_n, z\rangle\Big\}$$

on remarque que K est un espace métrique compact dans F et que la famille $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui constitue H est équicontinue sur K donc par le théorème d'Ascoli il existe une sous-suite $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et une fonction continue $\varphi \in C(K)$ telles que φ_{n_k} converge uniformément dans K vers φ quand k tend vers l'infini. En particulier on a

$$\sup_{x\in B(E)} \left|\langle y_{n_k} - y_{n_j}, Tx\rangle\right| \longrightarrow 0\,, \quad j,k \to \infty\,.$$

La suite $(T^*y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans E^*, donc elle converge dans E^*. On en déduit que l'ensemble $T^*(B(F^*))$ est relativement compact.

Inversement supposons que T^* appartient à $\mathcal{K}(F^*, E^*)$, alors on sait que T^{**} appartient à $\mathcal{K}(E^{**}, F^{**})$ et donc $T^{**}(B_E)$ est d'adhérence compacte dans F^{**}. Mais $T(B_E) = T^{**}(B_E)$ et F est fermée dans F^{**} (on rappelle la Proposition A.3.10) donc $T(B_E)$ est d'adhérence compacte dans F. D'où le théorème. □

D.2.3. Alternative de Fredholm. Commençons par démontrer le théorème suivant, qui caractérise les espaces de dimension finie.

Théorème D.2.8 (Théorème de Riesz (1880-1956))**.** *Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité fermée $B(E)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Démonstration. Le résultat repose sur le lemme suivant, démontré plus bas.

Lemme D.2.9. *Soit E un espace vectoriel normé. Si $M \subset E$ est un sous-espace strict fermé de E alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in E$ tel que*

$$\|x\|_E = 1 \quad \textit{et} \quad d(x, M) \geq 1 - \varepsilon\,.$$

Supposons que E soit de dimension infinie. Alors il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante de sous-espaces de E de dimension finie (qui sont donc fermés). Par le lemme D.2.9 on peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$x_n \in E_n\,, \quad \|x_n\|_E = 1\,, \quad \text{et} \quad d(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}\,\cdot$$

En particulier on a

$$\forall m < n\,, \quad \|x_n - x_m\|_E \geq \frac{1}{2}$$

donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune sous-suite convergente. Donc $B(E)$ n'est pas compact ce qui est une contradiction. D'où le théorème. □

Démonstration du Lemme D.2.9. Soit $y \in E \setminus M$. Comme M est fermé on sait que

$$d(y, M) > 0$$

donc il existe $y' \in M$ tel que

$$d(y, M) \leq \|y - y'\| \leq \frac{d(y, M)}{1 - \varepsilon}\,\cdot$$

Soit alors

$$x := \frac{y - y'}{\|y - y'\|_E}\,\cdot$$

Soit $z \in M$, montrons que $\|x - z\|_E \geq 1 - \varepsilon$. On a

$$\begin{aligned} x - z &= \frac{y - y'}{\|y - y'\|_E} - z \\ &= \frac{1}{\|y - y'\|_E}(y - y' - z\|y - y'\|_E) \\ &= \frac{1}{\|y - y'\|_E}(y - (y' + z\|y - y'\|_E)) \end{aligned}$$

et comme $y' + z\|y - y'\|_E$ appartient à M il vient

$$\|x - z\|_E \geq \frac{d(y, M)}{\|y - y'\|_E} \geq 1 - \varepsilon$$

d'où le résultat. □

Théorème D.2.10 (Alternative de Fredholm (1866-1927))**.** *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur compact de E dans lui-même. Alors*

a) $Ker(Id - T)$ est de dimension finie.

b) $Im(Id - T)$ est fermée et $Im(Id - T) = Ker(Id - T^*)^\perp$.

c) L'opérateur $Id - T$ est injectif si et seulement si il est surjectif.

d) $dim\, Ker(Id - T) = dim\, Ker(Id - T^*)$.

Remarques. Ce résultat concerne la résolution de l'équation $u - Tu = f$ et indique que

– soit pour tout $f \in E$ il existe une unique solution dans E

– soit $u - Tu = 0$ a n solutions linéairement indépendantes et l'équation $u - Tu = f$ a une solution si et seulement si f vérifie n conditions d'orthogonalité.

Le même résultat est vrai pour l'opérateur $\lambda \mathrm{Id} - T$ puisque $\lambda^{-1}T$ est compact.

Démonstration. a) Notons $K_0 := \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T)$. On a $B(K_0) = T(B(K_0)) \subset T(B(E))$ donc $B(K_0)$ est compacte, et par le théorème de Riesz on en déduit que K_0 est de dimension finie.

b) D'après l'exercice de la page 83, pour montrer que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - T) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T^*)^\perp$ il suffit de montrer que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - T)$ est fermée. Soit donc une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers y et telle qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que

$$y_n = x_n - Tx_n\,.$$

Montrons que $y \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - T)$. Notons

$$d_n := d(x_n, \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T))$$

et montrons tout d'abord que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Supposons qu'il existe une sous-suite, que nous noterons toujours $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que

$$d_n \longrightarrow \infty\,.$$

Comme $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T)$ est de dimension finie il existe x_n' dans $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T)$ tel que

$$d_n = \|x_n - x_n'\|_E\,.$$

Soit alors $z_n := \dfrac{x_n - x_n'}{d_n}$, on a

$$d(z_n, \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T)) = \frac{1}{d_n} d(x_n, \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T)) = 1$$

et

$$z_n - Tz_n = \frac{y_n}{d_n} \longrightarrow 0\,.$$

Comme T est compact, quitte à extraire à nouveau une sous-suite il existe z tel que

$$Tz_n \longrightarrow z$$

et donc comme $z_n - Tz_n \longrightarrow 0$, on a

$$z_n \longrightarrow z\,.$$

Mais alors $z \in \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T)$ et $d(z, \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T)) = 1$, ce qui est absurde.

La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée et comme T est compact, quitte à extraire une sous-suite il existe x tel que

$$T(x_n - x'_n) \longrightarrow x \quad \text{et} \quad x_n - x'_n \longrightarrow y + x$$

puisque $y_n = x_n - x'_n - T(x_n - x'_n)$. Et on a alors

$$y = (y + x) - T(y + x) \in \operatorname{Im}(\mathrm{Id} - T)\,.$$

c) Supposons que $\mathrm{Id} - T$ est injectif mais pas surjectif et soit la suite

$$E_n := (\mathrm{Id} - T)^n(E)\,.$$

Comme $\mathrm{Id} - T$ n'est pas surjectif, E_1 est un sous-espace strict de E. Par ailleurs E_1 est stable par T. De même on montre que E_2 est un sous-espace strict de E_1 car $\mathrm{Id} - T$ est injectif et pas surjectif, et par récurrence on obtient que E_{n+1} est un sous-espace de E_n, et l'inclusion est stricte car $\mathrm{Id} - T$ est injectif et pas surjectif. Par ailleurs par la propriété b), comme la restriction de T à E_n est un opérateur compact de E_n, l'image E_{n+1} de $(\mathrm{Id}-T)_{|E_n}$ est fermée. La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite strictement décroissante de sous-espaces fermés et par le Lemme D.2.9 il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$x_n \in E_n\,, \quad \|x_n\|_E = 1 \quad \text{et} \quad d(x_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}\,.$$

Soient alors n et m tels que $n > m$, on a

$$T(x_n - x_m) = \Big((x_m - Tx_m) - (x_n - Tx_n) + x_n\Big) - x_m$$

et comme $(x_m - Tx_m) - (x_n - Tx_n) + x_n \in E_{m+1}$ il vient

$$\|T(x_n - x_m)\|_E \geq \frac{1}{2}$$

ce qui est absurde car T est compact. Donc $\mathrm{Id} - T$ est surjectif.

La réciproque s'obtient en appliquant le raisonnement précédent à T^* en utilisant les résultats de l'exercice page 83.

d) Définissons $d := \dim \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T)$ et $d^* := \dim \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T^*)$ et supposons que $d < d^*$. Comme $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T)$ est de dimension finie, on sait par le théorème de Hahn-Banach que $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T)$ admet un supplémentaire topologique dans E : en effet si on note $\varphi_i(x)$ l'application qui à $x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-T)$ associe la $i$ème coordonnée de x dans une base de $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-T)$ alors on peut prolonger φ_i à E tout entier et l'intersection des $\varphi_i^{-1}(\{0\})$ convient. On définit alors p projecteur continu de E sur $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-T)$. Comme $\operatorname{Im}(\mathrm{Id}-T) = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-T^*)^{\perp}$ est de codimension finie d^*, il admet un supplémentaire topologique dans E, noté $\tilde{E}$, de dimension d^*. Comme $d < d^*$, il existe une application linéaire $\ell : \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T) \to \tilde{E}$ injective et non surjective. Soit alors

$$B := T + \ell \circ p$$

opérateur compact sur E puisque $\ell \circ p$ est de rang fini. Soit $x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - B)$, alors

$$0 = x - Bx = (x - Tx) - \ell(px)$$

donc

$$x - Tx = 0 \quad \text{et} \quad \ell(px) = 0$$

donc $x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T)$ et $px = 0$ car ℓ est injective donc $x = 0$.

D'après la propriété c) appliquée à B on a $\operatorname{Im}(\mathrm{Id} - B) = E$. Mais c'est impossible car il existe $y \in \tilde{E} \setminus \operatorname{Im} \ell$ et pour un tel y l'équation $x - Bx = y$ n'admet pas de solution. Donc $d \geq d^*$.

En appliquant ce résultat à T^* on trouve

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T^{**}) \leq \dim \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T^*) \leq \dim \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T)\,.$$

Mais on constate facilement que $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T) \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - T^{**})$ donc $d = d^*$. Le théorème est démontré. □

D.2.4. Spectre d'opérateurs : définitions et premières propriétés.

Définition D.2.11. *Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{L}(E)$. Le spectre de T, noté $\sigma(T)$, est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble résolvant*

$$\rho(T) := \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, T - \lambda Id \text{ est bijectif de } E \text{ sur } E\Big\}\,.$$

On dit que λ est valeur propre de T si

$$Ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}\,.$$

L'ensemble des valeurs propres de T est appelé le spectre ponctuel de T et noté $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, et l'ensemble des valeurs propres isolées de multiplicité finie est appelé le spectre discret $\sigma_{\mathrm{d}}(T)$. On définit enfin le rayon spectral

$$r(T) := \sup \Big\{|\lambda|\,,\ \lambda \in \sigma(T)\Big\}\,.$$

Remarques. Par le théorème de l'application ouverte A.1.15, si $\lambda \in \rho(T)$ alors l'application $\lambda \longmapsto R(\lambda) := (\lambda \mathrm{Id} - T)^{-1}$ est continue de E dans E. On appelle résolvante cette application.

Les valeurs propres de T sont dans le spectre de T mais en général l'inclusion est stricte.

On peut également définir d'autres sous-ensembles de $\sigma(T)$, dont on ne se servira pas ici : le spectre essentiel est

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(T) := \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{C} \,/\, \text{soit } \dim \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}) = \infty \\ \qquad\qquad \text{soit } \operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id}) \text{ est fermée et codim} \operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id}) \neq \dim \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}) \\ \qquad\qquad \text{soit } \operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id}) \text{ n'est pas fermée} \end{array} \right\}.$$

On remarque que $\sigma_{\mathrm{ess}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma(T)$: si λ appartient ni à $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ ni à $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ alors on a $\dim \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}) = 0$ donc $\operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id})$ est fermée et $\operatorname{codim} \operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id}) = 0$ donc $\lambda \in \rho(T)$. On peut montrer que $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ est stable par perturbation compacte. La réunion $\sigma_{\mathrm{ess}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ n'est pas forcément disjointe. Enfin le spectre continu est

$$\sigma_{\mathrm{c}}(T) := \Big\{\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T) \setminus \sigma_{\mathrm{p}}(T) \ / \ \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id})} = E\Big\}\,,$$

et le spectre résiduel est

$$\sigma_{\mathrm{res}}(T) := (\sigma_{\mathrm{ess}}(T) \setminus \sigma_{\mathrm{p}}(T)) \setminus \sigma_{\mathrm{c}}(T)\,.$$

Proposition D.2.12. *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. Le spectre de T est compact et on a l'inclusion*

$$\sigma(T) \subset \overline{B(0, \|T\|)}\,. \tag{D.4}$$

Démonstration. Soit donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|T\|$. On remarque que l'équation

$$x = \frac{1}{\lambda}(Tx - f)$$

admet une solution unique grâce au théorème de point fixe de Picard et x est solution de $Tx - \lambda x = f$. Donc $T - \lambda\mathrm{Id}$ est bijectif.

Montrons maintenant que $\sigma(T)$ est fermé, ou de manière équivalente que $\rho(T)$ est ouvert. Soit donc $\lambda_0 \in \rho(T)$ et montrons que pour tout $f \in E$ et pour λ suffisamment proche de λ_0 il existe une solution à

$$Tx - \lambda x = f\,.$$

Il suffit d'écrire cette équation sous la forme

$$x = (T - \lambda_0\mathrm{Id})^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)x)$$

qui se résout à nouveau grâce au théorème de point fixe de Picard, dès que

$$|\lambda - \lambda_0|\,\|(T - \lambda_0\mathrm{Id})^{-1}\| < 1\,.$$

□

D.3. Spectre des opérateurs compacts

D.3.1. Structure spectrale des opérateurs compacts. Le théorème suivant, dont la démonstration repose sur l'alternative de Fredholm ci-dessus, donne une description précise du spectre des opérateurs compacts.

Théorème D.3.1 (Spectre des opérateurs compacts)**.** *Soit E un espace de Banach de dimension infinie et soit $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors*

a) $0 \in \sigma(T)$ *;*

b) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \setminus \{0\}$ *;*

c) soit $\sigma(T) = \{0\}$, *soit* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est fini, soit* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est une suite qui tend vers zéro.*

Démonstration. a) Supposons que $0 \notin \sigma(T)$. Alors T est bijectif et comme T est compact on en déduit que $\mathrm{Id} = T \circ T^{-1}$ est compact en tant qu'opérateur sur E. En particulier B_E est compacte ce qui implique que E est de dimension finie par le Théorème de Riesz D.2.8.

b) Soit $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ et supposons que $\mathrm{Ker}(T - \lambda\mathrm{Id}) = \{0\}$. Alors d'après le théorème D.2.10 c) on a $\mathrm{Im}(T - \lambda\mathrm{Id}) = E$ donc $\lambda \in \rho(T)$, contradiction.

c) Commençons par montrer que tous les points de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ sont isolés. Soit donc une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valeurs propres de T, distinctes et non nulles, convergeant vers une limite λ et montrons que $\lambda = 0$. Par définition et par b) il existe une suite de vecteurs non nuls $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E tels que

$$(T - \lambda_n\mathrm{Id})e_n = 0\,.$$

Soit $E_n := \mathrm{Vect}(e_k)_{1\leq k\leq n}$. On montre par récurrence que les e_n sont indépendants. En effet si ce résultat est vrai à l'ordre k alors on suppose que

$$e_{k+1} = \sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell e_\ell$$

et on a alors

$$0 = (T - \lambda_{k+1}\mathrm{Id})e_{k+1} = \sum_{1}^{k} \alpha_\ell(\lambda_\ell - \lambda_{k+1})e_\ell$$

et donc $\alpha_\ell = 0$ pour tout $1 \leq \ell \leq k$. La suite (E_n) est donc strictement croissante, et on a $(T - \lambda_n\mathrm{Id})E_n \subset E_{n-1}$. Le Lemme D.2.9 permet de construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in E_n$, et

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad d(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}\cdot$$

Soit alors $2 \leq m < n$, on a donc $E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n$. On écrit alors

$$\|\lambda_n^{-1}Tx_n - \lambda_m^{-1}Tx_m\| = \|\lambda_n^{-1}(Tx_n - \lambda_n x_n) - \lambda_m^{-1}(Tx_m - \lambda_m x_m) + x_n - x_m\| \geq d(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$$

et comme (Tx_n) admet une sous-suite convergente on ne peut pas avoir $\lambda_n \to \lambda \neq 0$.

Les éléments de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ sont donc tous isolés et donc l'ensemble

$$\sigma(T) \cap \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, |\lambda| \geq n^{-1}\right\}$$

est soit vide soit fini (comme $\sigma(T)$ est compact, s'il avait une infinité de points distincts il aurait un point d'accumulation).

Enfin si $\sigma(T) \setminus \{0\}$ contient une infinité de points distincts, ils forment une suite qui tend vers 0. Le résultat est démontré. □

D.3.2. Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints. On se place dans le cas où $E = H$ est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Alors grâce au théorème de représentation de Riesz D.1.2, on peut identifier H^* à H et donc T^* à un élément de $\mathcal{L}(H)$.

Définition D.3.2. *Soit H est un espace de Hilbert réel. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si $T^* = T$, donc si*

$$(Tx|y) = (x|Ty) \quad \forall x, y \in H\,.$$

Proposition D.3.3. *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose*

$$m := \inf_{\|x\|=1} (Tx|x) \quad et \quad M := \sup_{\|x\|=1} (Tx|x)\,.$$

Alors

$$\{m, M\} \in \sigma(T) \subset [m, M]\,.$$

Démonstration. Nous n'allons étudier que M, les propriétés correspondantes sur m s'obtiennent en remplaçant T par $-T$.

Soit $\lambda > M$, et montrons que $\lambda \in \rho(T)$. On sait que

$$(Tx|x) \leq M\|x\|^2 \quad \forall x \in H$$

et donc

$$\forall x \in H\,, \quad (\lambda x - Tx|x) \geq (\lambda - M)\|x\|^2$$

et le théorème de Lax-Milgram (Corollaire D.1.6) implique que $\lambda\mathrm{Id} - T$ est bijectif. En effet la forme bilinéaire

$$a(x, y) := (\lambda x - Tx|y)$$

est continue et coercive donc pour tout $z \in H$ il existe un unique $x \in H$ tel que

$$\forall y \in H\,, \quad (\lambda x - Tx|y) = (z|y)\,.$$

Montrons maintenant que $M \in \sigma(T)$. Supposons que ce n'est pas le cas. La forme bilinéaire

$$a(x,y) := (Mx - Tx|y)$$

est symétrique et l'on a

$$a(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in H\,.$$

On peut donc appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et il vient

$$|a(x,y)|^2 \leq a(x,x)a(y,y) \quad \forall x, y \in H$$

donc en l'appliquant à $y = Mx - Tx$ et en utilisant la continuité de a on obtient qu'il existe C telle que

$$\|Mx - Tx\|^2 \leq C(Mx - Tx|x) \quad \forall x \in H\,.$$

Soit maintenant (x_n) une suite telle que

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad (Tx_n|x_n) \longrightarrow M\,.$$

Alors

$$\|Mx_n - Tx_n\| \longrightarrow 0\,.$$

Si $M \in \rho(T)$, alors

$$x_n = (M\,\mathrm{Id} - T)^{-1}(Mx_n - Tx_n) \longrightarrow 0\,,$$

contradiction. Donc $M \in \sigma(T)$. La proposition est démontrée. □

Corollaire D.3.4. *Soit H un espace de Hilbert réel et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Si $\sigma(T) = \{0\}$ alors $T = 0$.*

Démonstration. D'après la proposition précédente on sait que

$$(Tx|x) = 0 \quad \forall x \in H\,.$$

En écrivant

$$2(Tx|y) = (T(x+y)|x+y) - (Tx|x) - (Ty|y)$$

on obtient le résultat cherché. □

Le théorème suivant est particulièrement important puisqu'il permet de diagonaliser les opérateurs auto-adjoints compacts.

Théorème D.3.5. *Soit H un espace de Hilbert réel séparable et $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact non nul. Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

Démonstration. On note $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite des valeurs propres distinctes de T, excepté 0, et on note $\lambda_0 = 0$. On pose $E_n := \mathrm{Ker}\,(T - \lambda_n \mathrm{Id})$. On sait que la dimension de E_n est finie si $n \geq 1$ et que E_0 est éventuellement vide mais peut être de dimension infinie. Le théorème va suivre du fait que la famille $(E_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de H.

Commençons par démontrer que les E_n sont deux-à-deux orthogonaux. Soit $n \neq m$ et $(x,y) \in E_n \times E_m$. Alors

$$Tx = \lambda_n x \quad \text{et} \quad Ty = \lambda_m y$$

et donc

$$(Tx|y) = \lambda_n(x|y) = (x|Ty) = \lambda_m(x|y)$$

donc $(x|y) = 0$.

Montrons maintenant que l'espace vectoriel F engendré par les E_n est dense dans H. On a $T(F) \subset F$ et donc $T(F^\perp) \subset F^\perp$ puisque

$$\forall (x,y) \in F^\perp \times F\,, \quad (Tx|y) = (x|Ty) = 0\,.$$

Soit $T_0 := T_{|F^\perp}$, c'est un opérateur auto-adjoint compact et son spectre est réduit à 0 puisque $\sigma(T_0) \setminus \{0\}$ est constitué de valeurs propres de T_0 qui sont aussi des valeurs propres de T (un vecteur propre associé serait alors à la fois dans F et dans $F^\perp$). Par le corollaire D.3.4 on a donc $T_0 = 0$. On en déduit que

$$F^\perp \subset \mathrm{Ker}\,(T) \subset F \quad \text{et} \quad F^\perp = \{0\}$$

donc F est dense dans H. On construit une base hilbertienne en choisissant une base de chaque E_n (de dimension finie pour $n \geq 1$ et grâce à la séparabilité de H pour E_0). Le théorème est démontré. $\square$